Exercices et problèmes

15 Soit la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 3 - i$.

1. Soit B le point d'affixe i et C le point d'affixe -1. On désigne par B′ et C′ les images respectives de B et C par f. Déterminer $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right)$ et exprimer B′C′ en fonction de BC.
2. Identifier f et donner ses éléments caractéristiques.

16 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A(3, −1) et B(0, 2). On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$, r la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

On pose $f = t \circ r \circ h$.

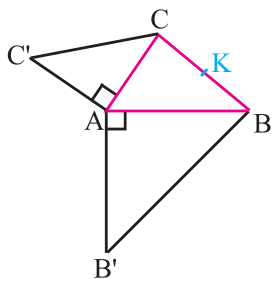
1. a. Caractériser $t \circ r$.
   b. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
   c. Donner l'écriture complexe de f.
2. Déterminer et construire le point K tel que $f(K) = O$.

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$.

1. Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en B et C en D.
   Préciser ses éléments caractéristiques.
3. On désigne par J le point d'affixe $3 + 5i$.
   Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On désigne par I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
   Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD soient des carrées.
   a. Calculer z_P et z_Q, les affixes respectives des points P et Q.
   b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$.
   En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
   c. En déduire que J est l'image de M par g et que J est le milieu de [PQ].

18 Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle quelconque, AB′B et ACC′ sont directs, rectangles, isocèles de sommet A et K est le milieu de [BC].

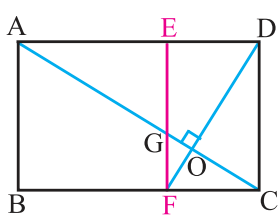


Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A. On note a, b et c les affixes des points A, B et C.

1. Exprimer les affixes k, b′ et c′ des points K, B′ et C′ en fonction de b et c.
2. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui envoie A sur B′ et K sur C′.
3. a. Donner les éléments caractéristiques de f, son expression complexe ainsi que sa forme réduite.
   b. En déduire que les droites (AK) et (B′C′) sont perpendiculaires.

19 Un rectangle d'or est un rectangle dont le quotient longueur/largeur est égal à $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

La figure ci-dessous représente un rectangle d'or ABCD et un carré ABFE.



1. Vérifier que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. En déduire que EFCD est un rectangle d'or.
2. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et D sur C. Préciser son rapport et son angle.